Modul Geometrie 1. Dezember 2008
Wintersemester 2008-2009
Schmale

Aufgaben

(19/20) Seien $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}, y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ Punkte im $\mathbb{R}^{n\times 1}$. In verschiedenen Anwendungen (z.B. Statistik, Bilderkennung) möchte man eine Ähnlichkeit oder sogar eine Bewegung im $\mathbb{R}^n$ finden, die die x-Punkte möglichst nahe an die y-Punkte heranbringt. Die Fragestellung, oft als **Procrustes-Problem**(9) bezeichnet, lautet dann mit $X = [x^{(1)}, \dots, x^{(m)}], Y = [y^{(1)}, \dots, y^{(m)}]$:

$$\textbf{Finde } \min\{\, \| f(X) - Y \|_F : \ f \in \mathcal{F} \,\} \ !$$

Dabei ist $f(X) = [f(x^{(1)}), \dots, f(x^{(m)})]$ und $\mathcal{F}$ die Menge oder Gruppe der interessierenden Abbildungen, z.B. $\mathcal{F} =$ Gruppe der Ähnlichkeiten. Wenn etwa $\mathcal{F} = \mathcal{B}(n)$, dann ist das Minimum, wenn es existiert, genau dann 0, wenn die y-Punktmenge kongruent zur x-Punktmenge ist. $\| \bullet \|_F$ ist die Wurzel aus der Quadratsumme aller Einträge, die so genannte Matrix-Frobenius-Norm. Eine systematische Lösung des Problems benutzt u.A. die Theorie der Polarzerlegungen von Matrizen.(10)

In dieser Aufgabe soll das Procrustes-Problem mit Ähnlichkeiten und an Hand einer leicht überschaubaren Konstellation illustriert und ohne Rückgriff auf umfassende Verfahren eher experimentell gelöst werden. Gegeben sind im $\mathbb{R}^2$ zwei Dreiecke (Punktetripel)

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, x^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, y^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, y^{(2)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, y^{(3)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass $x^{(1)} = 0 = y^{(1)}$ ohne Einschränkung angenommen werden kann und verschieben Sie die beiden Dreiecke entsprechend. Die neuen Punkte seien $0, x^{(2)'}, x^{(3)'}, 0, y^{(2)'}, y^{(3)'}$.

Eine Lösung der Minimum-Aufgabe soll nun mit Ähnlichkeiten f gesucht werden unter den Einschränkungen, dass 0 auf 0 abgebildet wird und dass die Dreiecksflächen von $\mathcal{C}(0, f(x^{(2)'}), f(x^{(3)'})$ und $\mathcal{C}(0, y^{(2)'}, y^{(3)'})$ übereinstimmen.

(b) Bestimmen Sie den dafür notwendigen Ähnlickkeitsfaktor ϱ.

Nach Durchführung der entsprechenden Streckung ist nun eine geeignete orthogonale Abbildung zu finden. Setzen Sie diese in der Form [Sch], Beispiel 2.11 (b), Seite 6 an. Zur Vermeidung aufwendiger Wurzelausdrücke soll nicht die Frobenius-Norm selbst zu Grunde gelegt werden, sondern ihr Quadrat. Das Minimumproblem führt dann in beiden Fällen des Beispiels 2.11 (b) auf je eine Gleichung, mit denen Sie weiterarbeiten können. (11)

(c) Finden Sie (ggf. angenähert) eine optimale orthogonale Abbildung (Drehwinkel und Determinante).

(d) Fertigen Sie die Dreiecke mit Karton o.Ä. maßstabsgetreu an und ermitteln Sie damit durch Schieben, Drehen, Umklappen und Messen einen Näherungswert.

---

(9) Zu Prokrustes siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Prokrustes`, zu „Procrustes problem“ gibt es außerdem interessante Einträge im Internetz.

(10) Siehe etwa: Nicholas Higham, *Functions of Matrices, Theory and Computation*, SIAM, 2008

(11) In einem Fall könnte sie so aussehen: $40a^2 + 40b^2 - 16b\sqrt{2} + 48 + 16a\sqrt{2}$. Dabei ist $a^2 + b^2 = 1$.